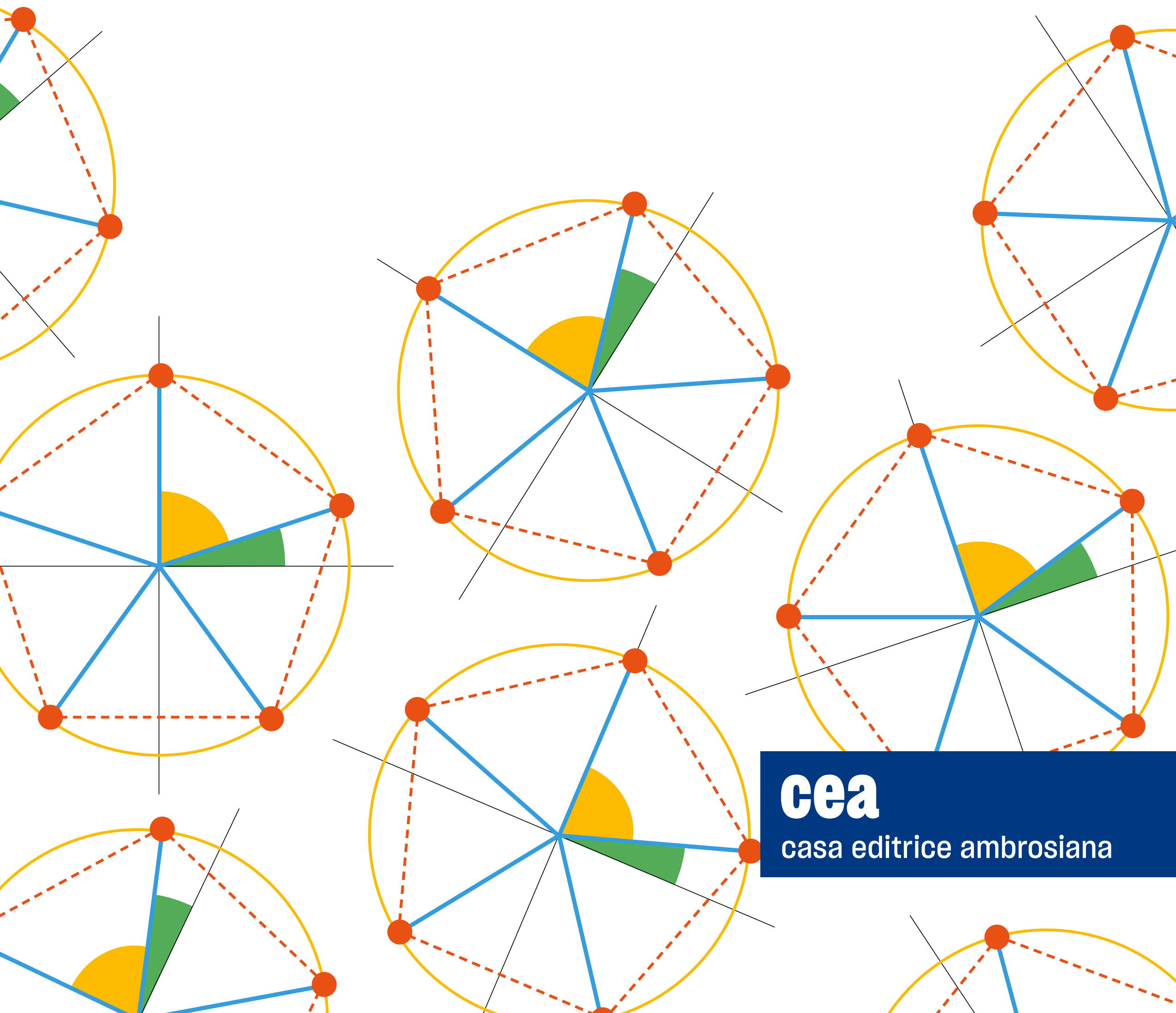
Anna Maria Bigatti
Lorenzo Robbiano

Matematica di base

Seconda edizione



cea
casa editrice ambrosiana

Anna Maria Bigatti
Lorenzo Robbiano

Matematica di base

Seconda edizione

Se vuoi accedere alle risorse online riservate

1. Vai su **my.zanichelli.it**
2. Clicca su *Registrati*.
3. Scegli *Studente*.
4. Segui i passaggi richiesti per la registrazione.
5. Riceverai un'email: clicca sul link per completare la registrazione.
6. Cerca il tuo codice di attivazione stampato in verticale sul bollino argentato in questa pagina.
7. Inseriscilo nella tua area personale su **my.zanichelli.it**

Se sei già registrato, per accedere ai contenuti riservati di altri volumi ti serve solo il relativo codice di attivazione.

Anna Maria Bigatti
Lorenzo Robbiano

Matematica di base

Seconda edizione

cea
casa editrice ambrosiana

Copertina: Anchora, Milano
Immagine di copertina: © Anchora, Milano

Prima edizione: aprile 2014

Seconda edizione: maggio 2021

Ristampa: **prima tiratura**

5 4 3 2 1 2021 2022 2023 2024 2025

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra loro. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.

Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro rivolgersi a:
CEA – Casa Editrice Ambrosiana
viale Romagna 5, 20089 Rozzano (MI)
fax 02 52202260 e-mail: segreteria_cea@ceaedizioni.it

Sul sito **online.universita.zanichelli.it/bigattirobbiano2e** è possibile verificare se sono disponibili errata corrige o aggiornamenti per questo volume.

Stampa:

per conto di Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

Indice generale

Premessa - Introduzione

Premessa

perché non c'è il punto interrogativo?
(da "Autocontraddizioni" di autore anonimo)

Perché per andare a vivere a Londra è utile studiare l'inglese? Perché per ballare è utile imparare a fare correttamente i giri a destra e a sinistra? Perché per fotografare è utile sapere che cosa sono la profondità di campo, la luminosità, la saturazione del colore? Perché per coltivare la terra è utile conoscere l'influenza del clima, la composizione del terreno, i cicli delle colture? Infine, perché per naturalisti, ambientalisti, geologi, biologi è utile studiare matematica?

Se le domande precedenti vi sono sembrate omogenee siete sulla buona strada. La matematica è il linguaggio basilare della scienza, senza il quale nessuno può onestamente dichiararsi scienziato, né tantomeno comunicare scienza. Sembra un'affermazione troppo forte? Vediamo. Come può un ambientalista studiare fenomeni di inquinamento se non conosce le equazioni della diffusione? Come può un naturalista o un biologo progettare un esperimento senza conoscere le tecniche della statistica? Come può un geologo studiare i fenomeni sismici senza conoscere le equazioni fondamentali delle onde? E si potrebbe andare avanti con migliaia di domande di questo tipo. Ma ce n'è una che le supera tutte. Come può uno scienziato fare o divulgare scienza, se non ne conosce la lingua? E, come detto, il linguaggio fondamentale della scienza è la matematica.

Il lettore non si stupisca se in questi appunti troverà citazioni, non-sense, frasi auto-contradditorie, aforismi, persino palindromi; è opinione degli autori che un testo di matematica non debba essere necessariamente arido e noioso.

$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

Avviso al "lettore"

Per gli autori la parola "lettore" è asessuata, significa "essere o ente che legge".

Introduzione alla prima edizione

Siamo tutti d'accordo nel dire che l'ambiente nel quale viviamo è complesso (non ci riferiamo al corpo $\mathbb{C}$). Con quale altro aggettivo definiremmo il clima, internet, le galassie, i mercati finanziari, l'evoluzione delle specie viventi, l'organizzazione di alcune colonie di insetti? E che dire della vita stessa, del pensiero, dei sentimenti? Persino le rocce, che sembrano immutabili, sono oggetto di complicate trasformazioni, solo che esse avvengono su scala temporale molto più estesa.

A partire dal 1600 la base della scienza è stata la teoria filosofica del **riduzionismo**. Da *Cartesio* fino alla fine dell'ottocento si pensò che un sistema, per quanto complesso, fosse *somma delle sue parti;* se capiamo le parti, capiamo il tutto. Ma dal 1900 la scena cambiò radicalmente. Novità fondamentali della fisica, della biologia, e della matematica relegarono il riduzionismo nella storia del pensiero umano.

Tra gli innumerevoli esempi ne citiamo uno in cui la complessità sfugge completamente a qualsiasi teoria riduzionistica. Si tratta della descrizione fatta da *Nigel Franks* nel lavoro [Fr-89]. Egli si esprime nel seguente modo.
La formica soldato (o formica legionaria) è uno degli animali dal comportamento meno sofisticato. Se ad esempio 100 *formiche sono messe su una superficie piatta, continueranno a girare intorno fino a morire di stanchezza. Se però ne mettiamo mezzo milione il gruppo nel suo insieme diventerà quello che alcuni autori chiamano superorganismo con intelligenza collettiva.*

Fa parte della natura umana il desiderio di capire. E come si fa a capire fenomeni così complessi? Innanzitutto si ha bisogno di una lingua con la quale comunicare i pensieri e le scoperte scientifiche, ma soprattutto si ha necessità di strumenti semplificativi e unificanti. Se ad esempio si vuole capire come si muovono i pianeti, bisogna attrezzarsi con strumenti adeguati. Ecco che nella mente dell'uomo si sono affacciate equazioni e figure geometriche, in altre parole **modelli matematici**.

Aristotele nella sua *Fisica* del IV secolo a.C. asseriva che qualsiasi oggetto in movimento tende a rallentare fino a fermarsi, a meno che non venga spinto a continuare il suo movimento: un modello che, effettivamente, rispecchia la nostra esperienza di tutti i giorni.

Ma dopo quasi 2000 anni *Galileo Galilei* (1564–1642), nel celebre lavoro *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, capovolse il punto di vista di Aristotele con un nuovo modello più preciso che tiene conto dell'effetto dell'attrito: misurando l'accelerazione e il rallentamento di una palla su piani a diverse inclinazioni, dedusse che su un piano perfettamente orizzontale, *in assenza di tutti gli impedimenti esterni e accidentali*, la palla non si sarebbe mai fermata, mantenendo il suo stato di moto rettilineo uniforme. In questo modo nacquero il *metodo scientifico* e l'*esperimento ideale*.

Abbiamo accennato al fatto che ogni modello matematico è una semplificazione della realtà. Ad esempio avete mai sentito parlare delle leggi che governano pressione, temperatura e volume dei gas? Nel 1622 *Boyle* enunciò la seguente legge: il prodotto della pressione e del volume di un *gas ideale* è costante, in altri termini si ha $PV = k_1$. *Mariotte* specificò nel 1676 che la legge vale se la temperatura è costante. Successive modifiche dovute a *Charles* nel 1787, *Gay-Lussac* nel 1809, *Avogadro* nel 1811, portarono all'enunciato della formula unificata: $PV = nRT$ (detta *Legge dei gas ideali*)

Avete notato che il soggetto di tutte queste leggi è il gas ideale? Ma che cosa è un gas ideale? Evidentemente nessuno può verificare sperimentalmente tali leggi, può solo verificarne l'*approssimata veridicità*. Il gas ideale è dunque una semplificazione intellettuale, è quello che elimina le incertezze dell'approssimazione e fornisce delle formule *pulite ed esteticamente belle*, che non a caso si chiamano modelli matematici.

per rendere le domande più agevoli da studiare,
gli scienziati generalmente idealizzano *il problema*
(*Melanie Mitchell*– "Complexity, A Guided Tour")

È fondamentale quindi prendere confidenza con questo linguaggio che descrive la natura e tende a contenerne la complessità entro modelli comprensibili e unificanti, ed è il motivo per cui abbiamo scritto questo libro dal titolo

Matematica di base

Perché tale titolo? Nel 2009 la Facoltà di Scienze dell'Università di Genova concordò, dopo ampia discussione, un *syllabus* di argomenti da proporre agli studenti di scienze naturali, ambientali, geologiche e biologiche; e questo libro ha come contenuto precisamente quanto concordato. Qualcuno obietterà che i titoli dei vari capitoli sono standard e che libri su questi argomenti abbondano.

Ma il vero punto è che il **tipo di esposizione** non lo è. Ed è proprio partendo da questo concetto che abbiamo deciso di avventurarci a realizzare un libro per nulla facile da scrivere. Ricordandoci che a scuola guida insegnano a guidare e non la chimica della combustione, abbiamo seguito l'idea che lo studente di scienze debba capire come funzionano gli strumenti matematici e imparare a conoscerli e usarli correttamente, senza necessariamente conoscerne i meccanismi interni e le dimostrazioni. Per questo motivo abbiamo fatto delle precise scelte stilistiche. In particolare abbiamo dato ampio risalto all'uso del colore, vero e proprio strumento di conoscenza; abbiamo inserito disegni e ritratti di molti matematici, abbiamo continuamente cercato di stimolare il lettore con spunti di riflessione. Nel tono dell'esposizione abbiamo accuratamente **evitato la seriosità**, male che affligge la maggior parte dei testi di matematica. Un utilizzo molto avanzato del linguaggio di composizione LaTeX ha consentito di tracciare **grafici molto precisi e belli a vedersi**. Infine abbiamo corredato le spiegazioni con esempi, molti dei quali provenienti dal mondo reale.

Ed eccoci alla domanda che tutti fanno: ci sono esercizi in questo libro? La risposta è sì, ci sono e sono stati scelti con molta cura. Inoltre consigliamo fortemente il libro di esercizi [BT-13].

Un'altra domanda sorge spontanea. C'è qualche contenuto on-line connesso a questo libro? La risposta è un deciso sì. A supporto del libro il lettore potrà avvalersi di un sito internet dove troverà esercizi svolti, test e altro materiale utile al completamento del suo apprendimento della matematica.

Concludiamo dicendo che siamo molto riconoscenti verso i colleghi che ci hanno aiutato con suggerimenti di vario tipo. In particolare un forte ringraziamento va a *John Abbott* e *Grazia Tamone*.

Come leggere questo libro

al di fuori di un cane, un libro è il migliore amico dell'uomo.
All'interno di un cane è troppo buio per leggere
(Groucho Marx)

La parte tecnica del libro si snoda in otto capitoli che si prestano a essere insegnati anche in ordine diverso da quello presentato. Riteniamo inutile fornire l'assistenza alla scelta di un percorso alternativo, che lasciamo alla libertà del lettore e del docente. E neppure ci soffermiamo a raccontare in dettaglio il contenuto, perchè desideriamo che il lettore entri al più presto in contatto con il mondo matematico, augurando che la lettura sia affascinante e piacevole. Troppo ottimisti? Sarà il lettore a dare la risposta.

ottimista: se l'economia va avanti così,
presto tutti andranno a chiedere l'elemosina
pessimista: a chi?

Introduzione alla seconda edizione

qual è la probabilità che uno studente capisca la probabilità?
(da "Citazioni aleatorie"
di autore incerto)

La prima edizione di *Matematica di base* risale ad Aprile 2014. Il suo uso didattico da parte nostra e di molti colleghi ha generato una serie di commenti e sollecitazioni mirate ad arricchirne la forma e il contenuto da vari punti di vista.

Vediamo quali sono le principali novità da noi introdotte, che differenziano questa seconda edizione. Innanzitutto ci è stato chiesto di inserire nel libro vari argomenti che non sono presenti nella prima edizione, tra i quali probabilità, coniche e funzioni di più variabili reali. A queste richieste abbiamo reagito nel seguente modo.

- Nel Capitolo 1 è stata aggiunta una sezione sulla *Probabilità* che segue quella sul *Calcolo combinatorio*, e quindi si giova del naturale legame tra i due temi. Per scrivere questa sezione abbiamo tratto beneficio da molte proficue interazioni con alcuni colleghi più esperti di noi in tale materia. In particolare ci piace ringraziare *ReRiRo*, ossia *Ivano Repetto*, *Eva Riccomagno*, *Maria Piera Rogantin* che hanno fornito molti spunti e suggerimenti.
- Abbiamo esteso il Capitolo 2 con una sezione sulle *Coniche*, tema molto classico mai passato di moda. A chi vuole sapere di più su questo e molti altri argomenti propedeutici al nostro testo, suggeriamo il libro

  Bigatti - Tamone, *Matematica Zero*, Casa Editrice Ambrosiana (2020)
- Nel Capitolo 2 è stata anche aggiunta una più articolata discussione sulle *Coordinate polari*. Nella prima edizione esse avevano poco risalto, mentre ora sono messe in rilievo anche nel Capitolo 3 e nel nuovo Capitolo 9.
- Abbiamo arricchito il Capitolo 3 con l'aggiunta di vari esempi e spiegazioni sui *Numeri complessi*, argomento spesso ostico per gli studenti, ma così importante anche per le sue applicazioni da meritare particolare attenzione.
- Il nuovo Capitolo 9, *Funzioni di più variabili reali*, introduce spunti e nozioni che, anche senza entrare troppo in profondità nella materia, possono essere usati come trampolino di lancio per ulteriori approfondimenti.

Per quanto riguarda le migliorie, ecco una dettagliata descrizione.

- Abbiamo fatto le correzioni suggerite dall'uso didattico del libro, sia da parte nostra che da parte di colleghi che gentilmente ci hanno segnalato errori nella prima edizione. Ovviamente speriamo di non averne inseriti di nuovi, anche se sappiamo per esperienza come questa speranza sia infondata!
- Tutto il testo è stato rivisto e migliorato fino nei minimi dettagli, aggiungendo commenti, puntualizzando concetti importanti e fornendo dettagliate indicazioni al lettore.
- Nella introduzione alla prima edizione c'è scritto: *abbiamo seguito l'idea che lo studente di scienze debba capire come funzionano gli strumenti matematici e imparare a conoscerli e usarli correttamente, senza necessariamente conoscerne i meccanismi interni e le dimostrazioni.* Pur rimanendo essenzialmente fedeli a tale impostazione, abbiamo voluto accontentare molti colleghi che ci hanno richiesto di inserire o esplicitare qualche dimostrazione formale.
- Abbiamo offerto nuovi cenni storici che ora permeano tutto il libro e permettono di inquadrare meglio il significato di molti concetti.
- Abbiamo contraddistinto con diversi colori le *Curiosità* propriamente matematiche dalle *Curiosità applicative* e ne abbiamo aggiunte di nuove.
- È stato migliorato l'aspetto visivo, impreziosendo il volume con ritocchi e aggiunta di grafici, con nuove immagini di illustri scienziati, mantenendo lo stesso stile e il ricco utilizzo del colore quale strumento di informazione.
- Il vecchio indice analitico è stato completamente rinnovato e potenziato, e ora enfatizza la ricchezza di collegamenti che permeano la matematica.
- Abbiamo cercato di contenere il più possibile lo spazio dedicato a tutte le novità, ispirati dal celebre aforisma di *Blaise Pascal* (1623–1662), il quale scrisse *"questa lettera è più lunga delle altre perché non ho avuto agio di farla più breve"*.

Blaise Pascal

In conclusione, ci auguriamo che la nuova edizione possa essere di aiuto ai docenti e soprattutto agli studenti che la utilizzeranno nei loro corsi di studio. Ci piace anche immaginare che qualcuno leggerà il libro per il solo gusto di imparare e di avvicinarsi all'immenso crogiolo di sapere e di meraviglie che la matematica offre a chi le si accosta senza pregiudizi.

it is easier to smash an atom than a prejudice
è più facile spezzare un atomo che un pregiudizio
(*Albert Einstein*)

Capitolo 7

Integrali

nature laughs at the difficulties of integration
(Pierre-Simon Laplace)

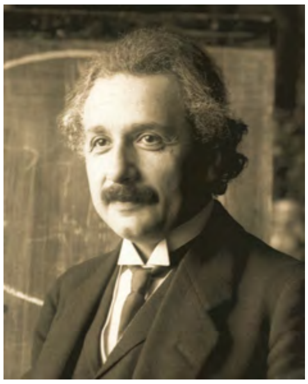
God does not care about our mathematical difficulties,
he integrates empirically
(Albert Einstein)

Le affermazioni di *Pierre Simon Laplace* e *Albert Einstein* ci suggeriscono l'idea che l'integrazione sia una operazione insita in natura, anche se difficile da risolvere.

Qui stiamo parlando di un concetto matematico che definire basilare è persino riduttivo.

D'altra parte, come disse un vecchio professore genovese di fronte a un pubblico stupito, *la matematica si divide in due parti, quella facile e quella che non so.*

Laplace (1749–1827)



Einstein (1879–1955)

Cerchiamo quindi di colmare qualche lacuna. In matematica si trovano due concetti di integrazione, quella indefinita e quella definita. Sono due cose completamente diverse.

L'integrazione indefinita o anti-derivazione è un caso particolare di una famiglia vastissima di equazioni che si chiamano *equazioni differenziali*. L'integrazione definita, invece, *misura le aree* delimitate dai grafici delle funzioni. Ma, come ormai dovremmo essere abituati, la matematica non finisce di stupire e anche in questo caso ci riserva una notevole sorpresa. Infatti vedremo che questi due concetti sono intrinsecamente legati.

7.1 Anti-derivata, primitiva, integrale indefinito

Abbiamo già visto come i matematici, data una certa operazione, cerchino di trovarne l'**inversa**. Così, dopo aver studiato l'operazione di **derivazione**, studiamo la sua inversa.

Anti-derivata o **primitiva**

Data una funzione $f(x)$, una funzione $g(x)$ si chiama **anti-derivata** o **primitiva** di $f(x)$ se vale l'uguaglianza

$$\boldsymbol{g'(x) \ = \ f(x)}$$

La prima facile osservazione è che l'anti-derivata di una funzione non è univocamente definita: infatti se $g(x)$ è una anti-derivata di $f(x)$ e $c \in \mathbb{R}$ una qualunque costante, anche la derivata della funzione $g(x){+}c$ è $f(x)$.

Esempio 7.1 (Primitive)

Tutte le funzioni costanti con dominio $\mathbb{R}$ sono primitive della funzione $f(x) = 0$. Per esempio per la funzione costante $g(x) = 4$ si ha $g'(x) = 0$.

Una primitiva della funzione $f(x) = 2x$ è $g(x) = x^2$, perché $g'(x) = 2x$.

Tutte le funzioni $\frac{1}{3}x^3{+}c$, per qualsiasi costante $c \in \mathbb{R}$, sono primitive di $f(x) = x^2$.

Infatti la derivata di $\frac{1}{3}x^3{+}c$ è x^2 qualunque sia $c \in \mathbb{R}$.

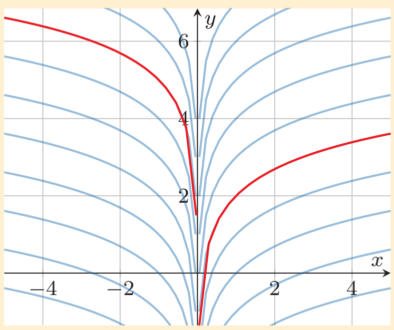
E vale anche il viceversa. Se $g_1(x)$ e $g_2(x)$ sono primitive di $f(x)$ definita su $\mathbb{R}$, la derivata di $g_1(x){-}g_2(x)$ è $f(x){-}f(x) = 0$ e quindi $g_1(x){-}g_2(x)$ è costante. Se il dominio non è $\mathbb{R}$ le cose cambiano leggermente, infatti $g_1(x)$ e $g_2(x)$ differiscono per costanti indipendenti sugli **intervalli** che formano il dominio di $f(x)$.

Esempio 7.2 (Costanti indipendenti sugli intervalli)

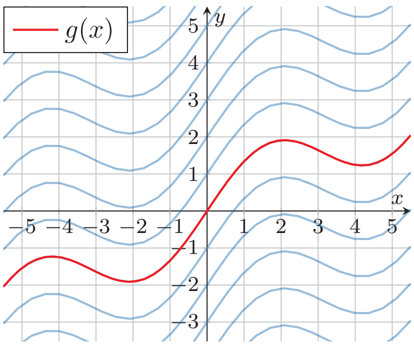
Se il dominio di $f(x)$ è un'unione di intervalli disgiunti, le costanti c sono indipendenti sui diversi intervalli massimali. Per esempio, se consideriamo la funzione $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$ definita su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, una sua primitiva è

$$\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} \ln(x) + 5 & \text{per } x > 0 \\ \ln(-x) + 2 & \text{per } x < 0 \end{cases}}$$

Infatti vale l'uguaglianza $g'(x) = \frac{1}{x}$.



Anche in questo caso scriviamo $\mathbf{\ln(|x|)+c}$, mentre dovremmo indicare la presenza di due costanti indipendenti in questo modo $\begin{cases} \ln(|x|)+c_1 & \text{per } x>0 \\ \ln(|x|)+c_2 & \text{per } x<0 \end{cases}$.



Se vogliamo visualizzare l'insieme delle primitive di una data funzione $f(x)$ definita su un intervallo, possiamo dire che, se $g(x)$ è una primitiva $g(x)$, i grafici di tutte le primitive di $f(x)$ si ottengono con una traslazione verticale del grafico di $g(x)$.

Approfondimento. *Ricordando la definizione di derivata come pendenza del grafico, il lettore sa fornire una spiegazione* geometrica *dell'affermazione precedente?*

Possiamo quindi raccogliere tutte le primitive di una funzione in una famiglia.

Integrale indefinito

Tutte le anti-derivate (o primitive) di una funzione $f(x)$ costituiscono un *insieme di funzioni* detto **integrale indefinito**, che si scrive

$$\int \boldsymbol{f(x)}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}$$

Se $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$, tutte le primitive di $f(x)$ sono della forma $g(x)+c$ dove c è una costante in $\mathbb{R}$ e si scrive

$$\int \boldsymbol{f(x)}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{g(x)+c} \quad \boldsymbol{c}\in\mathbb{R}$$

anche se formalmente è un *abuso di notazione*. Infatti si dovrebbe usare la terminologia degli insiemi, e si dovrebbe specificare che ci sono *costanti indipendenti sugli intervalli disgiunti* che formano il dominio di $f(x)$.

Esempio 7.3 (Integrali indefiniti)

Per $f(x)=\sin(x)$ si ha $f'(x)=\cos(x)$, quindi

$$\int \cos(x)\,dx \;=\; \sin(x)+c \quad c\in\mathbb{R}$$

Per $f(x)=x$ si ha $f'(x)=1$, quindi

$$\int dx \;=\; x+c \quad c\in\mathbb{R}$$

Per $f(x)=e^x$ si ha $f'(x)=e^x$, quindi

$$\int e^x\,dx \;=\; e^x+c \quad c\in\mathbb{R}$$

7.2 Regole di integrazione

alla festa tutte le funzioni si divertivano
ma l'esponenziale stava in disparte
la radice le disse: "vieni con noi! Ìntegrati!"
l'esponenziale rispose: "no, tanto è lo stesso"

Esistono svariate tecniche utilizzabili per trovare primitive di funzioni. In questa sezione ne vedremo solo un paio tradizionalmente considerate nei libri di matematica.

Prima di tutto è bene mettere in chiaro che è più difficile determinare le primitive piuttosto che le derivate, ma a volte è addirittura **impossibile** *esprimerle* con una formula (vedi *Gaussiana* a pag. 198).

In secondo luogo, al giorno d'oggi esistono programmi sofisticati che calcolano primitive di funzioni in modo esatto o con ottime approssimazioni. Quindi, a nostro parere, diventa inutile imparare molti trucchi, mentre importante è capire bene gli strumenti che vengono utilizzati.

Iniziamo ricordando le tabelle che abbiamo visto sulle regole di derivazione a pag. 164 e il fatto che dobbiamo descrivere l'operazione inversa. Riconsideriamo quindi le funzioni elementari, le operazioni di somma e prodotto per una costante, le operazioni di prodotto e composizione di funzioni.

Per le funzioni elementari basta "scrivere le **tabelle** al contrario".

per $k \neq -1$ $\int x^k \,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}$	$+\, c$
$\int x^{-1} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$	$=$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$+\, c$

$\int e^x \,\mathrm{d}x$	$=$	e^x	$+\, c$
$\int \sin(x) \,\mathrm{d}x$	$=$	$-\cos(x)$	$+\, c$
$\int \cos(x) \,\mathrm{d}x$	$=$	$\sin(x)$	$+\, c$

Per le operazioni di **somma** e di **prodotto per una costante** abbiamo, analogamente alla derivata, la compatibilità con l'operazione di integrale.

$\int f(x) + g(x) \,\mathrm{d}x$	$=$	$\int f(x) \,\mathrm{d}x + \int g(x) \,\mathrm{d}x$
$\int k \cdot f(x) \,\mathrm{d}x$	$=$	$k \cdot \int f(x) \,\mathrm{d}x$

Un caso particolare di quest'ultima regola è la formula $\int -f(x) \,\mathrm{d}x = -\int f(x) \,\mathrm{d}x$.

Curiosità matematica 7.4 (Operatori lineari)

In *matematichese* si dice che l'integrale e la derivata sono **operatori lineari**, che significa che *rispettano* (o *sono compatibili* con) l'operazione di somma e l'operazione di prodotto per una costante. Queste sono le operazioni fondamentali dell'*Algebra Lineare* che si incontrano nello studio dei **vettori** (vedi pag. 41) e delle **matrici** (vedi pag. 216).

Esempio 7.5 (Integrali di funzioni polinomiali)

Visto che, come detto prima, l'integrale indefinito è compatibile con l'operazione di somma e di prodotto per una costante, per calcolare l'integrale indefinito di una funzione polinomiale basta applicare le formule per le primitive delle funzioni $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

$$\int 4x^2 - \tfrac{2}{5}x - 1 \; dx = 4\int x^2 \, dx - \tfrac{2}{5}\int x \, dx - \int 1 \, dx =$$

$$= 4\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{2}{5}\tfrac{1}{2}x^2 - x + c = \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^2 - x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esempio 7.6 (Integrali di funzioni razionali)

Vediamo un'applicazione della scomposizione di funzioni razionali illustrata a pag. 90. Avevamo scritto che qualsiasi frazione ridotta di polinomi a coefficienti reali con denominatore $q(x)$ si può scrivere come **somma di frazioni** aventi come denominatori i fattori di $q(x)$, i quali sono lineari (radici reali) e quadratici (radici complesse coniugate).

In particolare nell'esempio avevamo descritto questa scomposizione

$$\frac{4x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-x-2}{x^2+1}$$

Di conseguenza, se vogliamo calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{4x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \, dx$$

possiamo scomporre il calcolo nella ricerca di primitive di $\frac{1}{x-1}$, $\frac{1}{(x-1)^2}$ e $\frac{-x-2}{x^2+1}$. Possiamo verificare che

- Una primitiva di $\frac{1}{x-1}$ è $\ln(|x-1|)$.
- Una primitiva di $\frac{1}{(x-1)^2}$ è $-\frac{1}{x-1}$.
- Vale l'uguaglianza $\frac{-x-2}{x^2+1} = \frac{-\frac{1}{2}(2x)}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}$.
  - Una primitiva di $\frac{2x}{x^2+1}$ è $\ln(x^2+1)$.
  - Una primitiva di $\frac{1}{x^2+1}$ è $\arctan(x)$ (pag. 168).

Applicando la scomposizione si conclude che

$$\int \frac{4x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \, dx = \ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\arctan(x) + c$$

Fino qui sembra tutto fattibile, anche se non del tutto facile. Le difficoltà vere iniziano quando ci chiediamo come *invertire* le formule di derivazione per le operazioni di composizione e di prodotto di funzioni. Infatti la derivata *non rispetta* queste operazioni. La conseguenza è il fatto che possiamo invertire solo in casi particolari (e se siamo abbastanza bravi e allenati a riconoscerli).

7.2.1 *Integrali per sostituzione*

Ricordiamo la derivata per la composizione di funzioni. Con le opportune condizioni di derivabilità per le funzioni f e g, la derivata di $g(f(x))$ è $g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Quindi possiamo costruire la **tabella** delle funzioni elementari composte con una funzione $f(x)$.

per $k \neq -1$ $\int (f(x))^k \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(f(x))^{k+1}}{k+1} + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + c$
	$\int \sin(f(x)) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(f(x)) + c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(\lvert f(x)\rvert) + c$	$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \sin(f(x)) + c$

È utile imparare a riconoscere questi casi di sostituzione "semplice" per poter risolvere direttamente l'integrale invece che applicare il metodo di sostituzione generale che vedremo dopo questo esempio.

Esempio 7.7 (Alcuni integrali per sostituzione "semplice")

- $\int \sin(x)^4 \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$.
  Siamo nel caso $(f(x))^k \cdot f'(x)$ con $f(x) = \sin(x)$, quindi
  $$\int \sin(x)^4 \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = \int (f(x))^4 \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(x)^5}{5} + c$$
- $\int \frac{1}{x} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$.
  Siamo nel caso $\sin(f(x)) \cdot f'(x)$ con $f(x) = \ln(x)$, quindi
  $$\int \frac{1}{x} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \int \sin(f(x)) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(\ln(x)) + c$$
- $\int \sin(x^2) \cdot x\,\mathrm{d}x$.
  Siamo nel caso $\sin(f(x)) \cdot f'(x)$ con $f(x) = x^2$, quindi
  $$\int \sin(x^2) \cdot x\,\mathrm{d}x = \int \sin(f(x)) \cdot \frac{1}{2} f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + c$$
- $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$.
  Dato che $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ siamo nel caso $\frac{f'(x)}{f(x)}$ con $f(x) = \cos(x)$ (attenti al segno!). Quindi
  $$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{-f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = -\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + c$$

Approfondimento. *Il lettore verifichi la correttezza dei risultati mostrando che la loro derivata è uguale alla rispettiva funzione integranda.*

Dalla formula della derivata di funzioni composte si ottiene che, date due funzioni integrabili $f(x)$, $g(x)$, vale la seguente identità, che può essere scritta e interpretata in due modi.

Integrazione per sostituzione

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\, \mathrm{d}x = \int g(u)\, \mathrm{d}u \qquad \text{dove } u = f(x)$$

$$\int g(x)\, \mathrm{d}x = \int g(f(u)) \cdot f'(u)\, \mathrm{d}u \qquad \text{dove } x = f(u)$$

La prima scrittura è semplicemente la generalizzazione delle tabelle di sostituzioni semplici che abbiamo appena visto. Vediamo un altro esempio di applicazione.

Esempio 7.8 (Un integrale per sostituzione: $\int \frac{x}{\sqrt{1-5x^2}}\, \mathrm{d}x$)

Calcoliamo $\int \frac{x}{\sqrt{1-5x^2}}\, \mathrm{d}x$.

Poniamo $f(x) = 1 - 5x^2$ e osserviamo che $f'(x) = -10x$. Quindi il numeratore è $x = -\frac{1}{10} f'(x)$.

Allora, con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, si ha $\int \frac{x}{\sqrt{1-5x^2}}\, \mathrm{d}x = \int -\frac{1}{10} \cdot g(f(x)) \cdot f'(x)\, \mathrm{d}x$

Applicando la sostituzione $u = f(x)$, la precedente uguaglianza si riscrive così

$$= -\frac{1}{10} \int g(u)\, \mathrm{d}u = -\frac{1}{10} \int u^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}u = -\frac{1}{10} \cdot 2 \cdot u^{\frac{1}{2}} + c$$

Sostituendo u con $f(x)$, si conclude $\int \frac{x}{\sqrt{1-5x^2}}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{5} \sqrt{1 - 5x^2} + c$

Con la seconda formulazione si cambia il punto di vista. Si sostituisce a x una funzione $f(u)$ allo scopo di ottenere un integrale più trattabile.

Esempio 7.9 ($\int \sin(\sqrt{x})\, \mathrm{d}x$ – parte 1)

Calcoliamo $\int \sin(\sqrt{x})\, \mathrm{d}x$

Innanzi tutto osserviamo che non è un prodotto e quindi non si notano sostituzioni semplici da poter applicare.

Allora applichiamo una sostituzione secondo la seconda formulazione: con l'intento di togliere la radice, poniamo $u = \sqrt{x}$ e quindi $x = f(u) = u^2$
Osserviamo che le trasformazioni sono valide per $x \in [0, +\infty)$ e per $u \in [0, +\infty)$.

Di conseguenza

$$\int g(x)\, \mathrm{d}x = \int g(f(u)) \cdot f'(u)\, \mathrm{d}u = \int 2u \cdot \sin(u)\, \mathrm{d}u = 2 \int u \cdot \sin(u)\, \mathrm{d}u$$

È meglio così? Non c'è più la radice e ora c'è un prodotto. Come si prosegue? La conclusione del calcolo è alla fine di pag. 192.

7.2.2 *Integrali per parti*

Ricordate la derivata per un prodotto di funzioni? Con le opportune condizioni di derivabilità per le funzioni f e g, la derivata di $f(x)\cdot g(x)$ è $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ da cui si deduce

$$f(x)\cdot g(x) \;=\; \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Allora si ha la seguente identità.

Integrazione per parti

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

Non sembra di avere fatto un grosso progresso in quanto dobbiamo comunque determinare l'integrale di un prodotto di funzioni. Però in alcuni casi questo metodo è vincente perché il secondo prodotto è facile da integrare.

Esempio 7.10 (Un integrale per parti: $\int x\cdot e^x\,\mathrm{d}x$)

Ricordando che la derivata di e^x è e^x, quando un fattore è un esponenziale proviamo a utilizzare l'integrazione per parti per semplificare l'altro fattore.
Per esempio, per $\int x\cdot e^x\,\mathrm{d}x$ poniamo

$$f(x)=x \qquad g(x)=e^x$$

e dalla formula dell'integrazione per parti si deduce

$$\int x\cdot e^x\,\mathrm{d}x \;=\; x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,\mathrm{d}x \;=\; x\cdot e^x - e^x + c$$

Esempio 7.11 (Un altro integrale per parti: $\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$)

Anche quando un fattore è $\sin(x)$ o $\cos(x)$ si prova a utilizzare l'integrazione per parti per semplificare l'altro fattore.

Per calcolare $\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ poniamo $f(x)=x$ e $g(x)=-\cos(x)$ e otteniamo

$$\int x\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -x\cdot\cos(x) - \int 1\cdot(-\cos(x))\,\mathrm{d}x \;=\; -x\cdot\cos(x)+\sin(x)+c$$

Esempio 7.12 ($\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ – parte 2)

Alla fine di pag. 191 avevamo visto che $\displaystyle\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \;=\; 2\int u\cdot\sin(u)\,\mathrm{d}u.$

Nell'esempio precedente abbiamo visto che $-u\cdot\cos(u)+\sin(u)$ è una primitiva di $u\cdot\sin(u)$. Quindi ora basta sostituire $u=\sqrt{x}$ e possiamo concludere che

$$\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \;=\; -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x})+2\sin(\sqrt{x})+c$$

7.3 Integrali definiti

In questa sezione trattiamo ancora il concetto di integrale, ma con un significato diverso. Poi chiariremo la sua connessione con le primitive e gli integrali indefiniti.

Incominciamo la sezione con un piccolo passo indietro: usando il concetto di limite, proviamo a fare il calcolo di un'area.

7.3.1 *Calcolo di aree*

Un fondamentale utilizzo del concetto di limite di successioni risale a circa due millenni orsono, quando *Eudosso* e poi *Archimede* utilizzarono quello che viene chiamato **metodo di esaustione** per calcolare una particolare area. Solo molti secoli più tardi il matematico milanese *Bonaventura Cavalieri* con un lavoro del 1635 basato sul metodo di Eudosso/Archimede, contribuirà in modo decisivo alla definizione moderna del concetto di area.

Cavalieri (1598–1647)

Vediamo come funziona l'idea. Consideriamo la regione, detta A, compresa tra l'asse x e la porzione di parabola di equazione $y = x^2$. Vorremmo calcolarne l'area. Per fare ciò ripartiamo il segmento dell'asse x compreso tra l'origine e il punto di ascissa a in n parti uguali, in modo che ciascuna parte sia lunga $\frac{a}{n}$.

Consideriamo quindi i rettangoli come nella figura accanto. Le loro aree sono rispettivamente

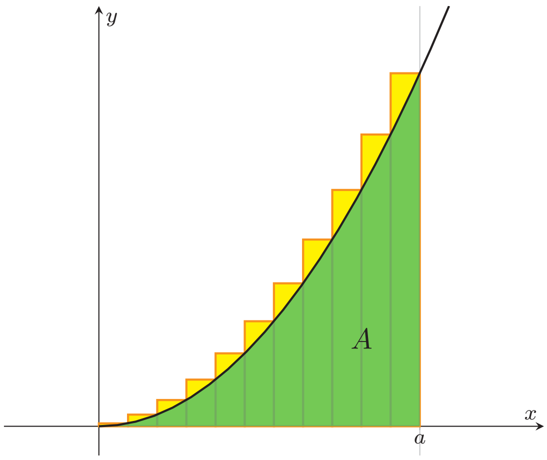
$$\tfrac{a}{n}\cdot(\tfrac{a}{n})^2,\quad \tfrac{a}{n}\cdot(\tfrac{2a}{n})^2,\quad \ldots,\quad \tfrac{a}{n}\cdot(\tfrac{na}{n})^2$$

La somma di tutte queste aree è dunque

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{ka}{n}\right)^2 = \left(\frac{a}{n}\right)^3\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2$$

Una nota formula (simile a quella dimostrata a pag. 14) afferma che

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Quindi l'area della regione formata dai rettangoli è

$$\left(\frac{a}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \left(\frac{a}{n}\right)^3 \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{a^3}{3}\left(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)$$

Ora osserviamo che, quanto più grande è n, tanto più la porzione di piano formata dai rettangoli si avvicina ad A, e quindi ciò avviene anche per le aree delle due regioni. L'idea è che l'area di A è dunque minore o uguale al limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^3}{3}\left(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{a^3}{3}$$

Facendo lo stesso conto con i rettangolini costruiti *sotto* la porzione di parabola, si ha che l'area di A è maggiore o uguale allo stesso limite.

La conclusione è $\text{Area}(A) = \frac{a^3}{3}$.

Approfondimento. *Il lettore sa dire perché questo metodo si chiama metodo di esaustione?*

Approfondimento. *Nella formula* $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *evidentemente il numero* $\sum_{k=1}^n k^2$ *è naturale. Il lettore sa dunque spiegare perché il prodotto dei tre numeri naturali* n, $n+1$, $2n+1$ *è multiplo di* 6*? Si suggerisce di considerare il resto della divisione di* $n(n+1)(2n+1)$ *per 2 e per 3.*

D'altra parte $\frac{x^3}{3}$ è una primitiva di x^2 e i matematici hanno scoperto che questo legame tra primitive e aree non è affatto casuale!

Abbiamo già detto che Cavalieri all'inizio del 1600 fece delle osservazioni fondamentali che portarono alla comprensione di quelle antiche intuizioni sul calcolo delle aree. In particolare egli si rese conto che per calcolare aree e volumi bisogna fare infinite somme.

Successivamente *Newton* e *Leibniz* contribuirono in modo determinante alla comprensione del legame tra derivata e primitiva.

Infine il matematico francese *Cauchy* riuscì a unificare tutte le teorie precedenti, dando loro una sistemazione completa e moderna.

Cauchy (1789–1857)

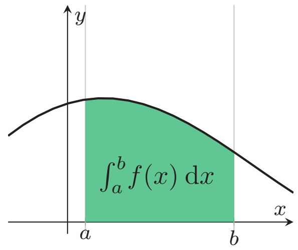
Ora scopriremo il legame tra primitiva e area. Per fare ciò abbiamo bisogno di dare una adeguata definizione di area di una regione al di sotto del grafico di una funzione.

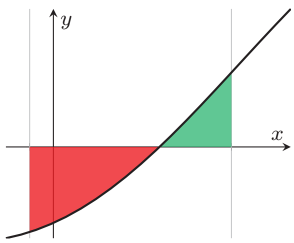
Integrale definito

L'**area con segno** della regione sotto il grafico di una funzione continua $f(x)$ e tra le rette verticali $x = a$ e $x = b$, si scrive

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

e si chiama **integrale definito** di $f(x)$ tra gli **estremi** a e b.





Se avete fatto attenzione, abbiamo scritto "area con segno". Intendiamo dire che, nel caso in cui il grafico si trovi al di sotto dell'asse x, e quindi la regione si trovi *sopra* il grafico, l'**integrale definito** è l'*opposto* dell'area.

Abbiamo usato lo stesso simbolo dell'integrale indefinito aggiungendo i due estremi a e b. Ma perché? Prepariamoci alla notevole scoperta.

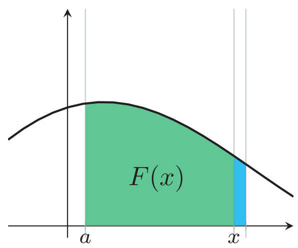
Fissiamo l'estremo a e lasciamo variare l'altro estremo che chiamiamo x, invece di b, per evidenziare la sua "variabilità".

Consideriamo l'area con segno della regione che sta sotto il grafico ed è compresa tra a e x. Evidentemente essa varia al variare di x, di conseguenza tale area è una funzione di x che chiamiamo **funzione integrale** e indichiamo con $\boldsymbol{F(x)}$.

Ora cambiamo nome alla variabile della funzione f per non fare confusione e quindi otteniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

Osserviamo che la regione che si ottiene spostando l'estremo x di una quantità sempre più piccola Δx, è sempre meglio approssimata dal rettangolino che ha base Δx e altezza $f(x)$, che ha area $\Delta x \cdot f(x)$.



Quindi la variazione dell'area totale divisa per Δx, lo spostamento piccolissimo o meglio **infinitesimo**, coincide con $f(x)$. Formalmente si scrive così

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, \mathrm{d}t}{\Delta x} = f(x)$$

Approfondiamo un poco questa affermazione e applichiamo la definizione di derivata alla funzione $F(x)$. Otteniamo

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, \mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, \mathrm{d}t}{\Delta x} = f(x)$$

Questa non è una dimostrazione rigorosa, ma il ragionamento fatto dovrebbe convincerci che con un poco di fatica in più si ottiene il risultato voluto, ossia che $F(x)$ è effettivamente una primitiva di $f(x)$.

Approfondimento. *Il lettore sa dire perché nella formula precedente il risultato non dipende da a?*

Come già detto molte volte, i matematici non si accontentano di intuizioni e ragionamenti informali.

Si attribuisce ai due matematici *Evangelista Torricelli* e *Isaac Barrow* la dimostrazione rigorosa del seguente teorema, il quale per la sua grandissima importanza, si chiama

Torricelli (1607–1647)

Barrow (1630–1677)

Teorema fondamentale del calcolo integrale (di Torricelli-Barrow)

Sia $f(x)$ una funzione continua su un intervallo chiuso $[a,b]$. Sia $F(x)$ la funzione definita sull'intervallo $[a,b]$ dalla formula $\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}$. Si ha

(a) La funzione $F(x)$ è derivabile, quindi continua, su (a,b) e $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

(b) Se $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ su $[a,b]$, allora $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = g(x)\big|_a^b}$ dove la scrittura $g(x)\big|_a^b$ denota la differenza $\boldsymbol{g(b) - g(a)}$.

Ora dovrebbe essere un poco più chiaro il motivo della strana scrittura $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Si tratta di una *deformazione grafica* della lettera "S" e quindi richiama la *somma* $\sum f(x)\Delta x$ eseguita su tutti i piccoli segmenti di lunghezza Δx, precisamente come abbiamo fatto a pag. 193.

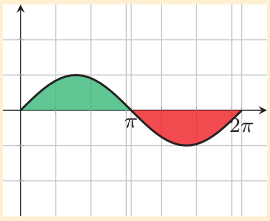
Il primo matematico che usò il simbolo $\int$ fu *Leibniz* intorno al 1675, e il primo che usò il simbolo $\int_a^b$ fu *Fourier* intorno al 1820. Era passato quasi un secolo e mezzo: tanto ci volle per arrivare alla notazione che oggi a noi sembra naturale!

Fourier (1772–1837)

Esempio 7.13 ($\int_a^b \sin(x)\,\mathrm{d}x$)

Calcoliamo l'integrale definito $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$. La funzione $\sin(x)$ è continua su $[0, 2\pi]$ quindi basta ricordare che una sua primitiva è $-\cos(x)$. Allora si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = (-\cos(x))\Big|_0^{2\pi} = = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$



Il risultato è 0 e ciò è in perfetta sintonia con l'intuizione che si ha osservando il fatto che le aree sopra e sotto il grafico sono uguali.

Avendo calcolato la primitiva, è facile calcolare separatamente l'area con segno della regione verde (sopra l'asse x)

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = (-\cos(x))\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = \mathbf{2}$$

e della regione rossa (sotto l'asse x, quindi negativa)

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = (-\cos(x))\Big|_{\pi}^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(\pi) = \mathbf{-2}$$

Notiamo inoltre ciò che l'intuizione non poteva suggerire: l'area della regione verde è esattamente uguale a quella di **due quadretti** (vedi anche pag. 263)!

Nella discussione precedente e anche negli esempi appena descritti si è fatto uso di alcune proprietà dell'integrale definito, proprietà che sono del tutto intuitive. Comunque, per completezza vediamone alcune enunciate nella seguente tabella.

Alcune proprietà dell'integrale definito

Valgono le seguenti regole.

(a) $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

(b) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

(d) Se $0 \le f(x) \le g(x)$ per ogni x in $[a, b]$, si ha $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(e) Se $m \le f(x) \le M$ per ogni x in $[a, b]$, si hanno le due disuguaglianze

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

(f) L'integrale definito è un **operatore lineare**, ossia valgono le uguaglianze

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

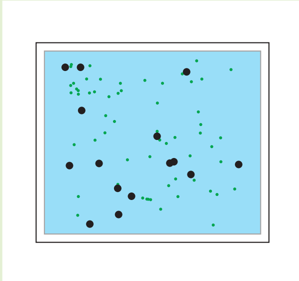
$$\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Approfondimento. *Il lettore provi, usando il concetto di area, a dimostrare alcune dipendenze tra le formule. Per esempio provi che (c) segue da (a) e (b).*

Curiosità applicativa 7.14 (Popolazione di batteri)

Questo esempio è tratto da [BEM-12]. Ricordiamo il concetto di crescita malthusiana (pag. 111) per affrontare il seguente problema.

Supponiamo che una popolazione di batteri entri in un ambiente in un certo momento e supponiamo che la sua numerosità cresca con legge malthusiana $N(t) = 10^3\, e^t$ dove t è il tempo misurato in ore.



Supponiamo inoltre che nell'ambiente in cui è entrata la popolazione sia disponibile un grammo di nutriente e che ogni batterio ne consumi due microgrammi ($2 \cdot 10^{-6}$ g) all'ora.

La domanda che ci poniamo è la seguente: per quanto durerà l'espansione della popolazione, ossia dopo quanto tempo sarà esaurito il cibo a disposizione?

Dato che ci interessa sapere dopo quanto tempo succede qualcosa, possiamo indicare con $t = 0$ il tempo iniziale. Indichiamo con $Q(t)$ la quantità di nutriente consumata, espressa in grammi, dall'inizio fino al tempo t. Inizialmente vale l'uguaglianza $Q(0) = 0$ e la variazione di $Q(t)$ al tempo t, ossia la derivata della funzione $Q(t)$, è data dalla quantità consumata dalla popolazione $N(t)$ all'ora t, ossia $2\cdot 10^{-6} N(t)$. Otteniamo

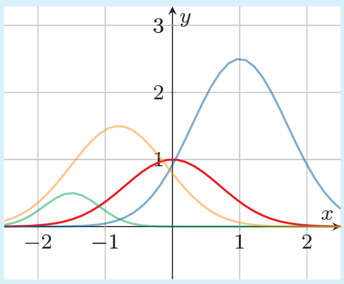
$$Q'(t) \;=\; 2\cdot 10^{-6} \cdot N(t) \;=\; 2\cdot 10^{-3} \cdot e^t$$

da cui

$$Q(t) \;=\; 2\cdot 10^{-3} \int_0^t e^t\, \mathrm{d}t \;=\; 2\cdot 10^{-3} \cdot (e^t - 1)$$

Poniamo $Q(t)$ uguale a 1 per calcolare a che ora t è stato consumato tutto il nutriente iniziale (1 g). Otteniamo $1 = 2\cdot 10^{-3} \cdot (e^t - 1)$ da cui $e^t = 501$ e quindi $t = \ln(501) \approx 6.2$ ore.

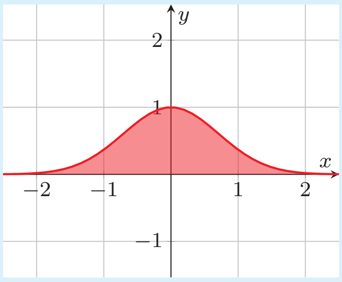
Curiosità matematica 7.15 (Gaussiana)



Le funzioni gaussiane hanno fondamentale importanza nella teoria e nelle applicazioni di Matematica, Fisica e Statistica. Le funzioni gaussiane hanno la forma

$$\boldsymbol{f(x) = a \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{c^2}}}$$

Consideriamo il caso particolare $\boldsymbol{f(x) = e^{-x^2}}$. Nonostante l'aspetto così semplice **non è possibile esprimere la sua primitiva** mediante composizioni semplici (operazioni razionali e radicali) di funzioni elementari.



Tuttavia è possibile valutare in modo esatto una cosa apparentemente molto più complicata, ossia l'area della regione infinita compresa tra il suo grafico e l'asse x. Si ottiene

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}}$$

7.4 Applicazioni del calcolo degli integrali

Qui di seguito vediamo alcune applicazioni degli integrali definiti. Moltissimi altri se ne hanno per esempio, ma non solo, in diversi problemi della fisica.

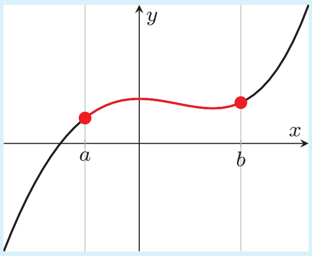
Curiosità matematica 7.16 (Lunghezza di una curva)

Supponiamo di volere determinare la lunghezza della curva grafico della funzione $f(x)$ definita tra gli estremi a e b. Vale la seguente formula.

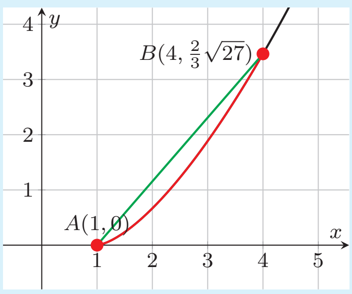
Lunghezza di una curva

Data una funzione continua $f(x)$ definita tra a e b, la lunghezza ℓ del suo grafico è data dalla formula

$$\boldsymbol{\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}$$



Vediamo un esempio. Sia $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$. Si ha $f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$. Allora la funzione $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ è $\sqrt{1+x-1} = \sqrt{x}$ e ha primitiva $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.



Quindi se vogliamo sapere la lunghezza del grafico compreso tra $x = 1$ e $x = 4$ calcoliamo

$$\left(\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4 = \tfrac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}1^{\frac{3}{2}} = \tfrac{16}{3} - \tfrac{2}{3} = \tfrac{14}{3} \approx 4.67$$

Dalla figura risulta che il tratto (rosso) del grafico è poco più lungo della corda (verde). Verifichiamo questo fatto calcolando la distanza tra i due punti estremi (vedi pag. 43):

$$d(A,B) = \sqrt{(4-1)^2 + (\tfrac{2}{3}\sqrt{27} - 0)^2} = \sqrt{21} \approx 4.58$$

Curiosità matematica 7.17 (Valore medio)

È fatto abbastanza noto che la media dei voti $21, 25, 27, 30, 30$ si calcola in questo modo $\frac{21+25+27+30+30}{5} = 26.6$. Infatti la **media aritmetica** o **valore medio** di r valori numerici $a_1, \ldots, a_r$ è il numero $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} a_i$.

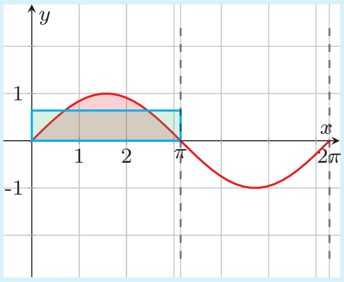
Per una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile in (a, b) si estende il concetto di *valore medio*, sostituendo alla somma dei valori l'integrale della funzione e al numero n l'ampiezza dell'intervallo.

Valore medio di una funzione

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$.
Il suo **valore medio** è
$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

Per esempio il valore medio di $\sin(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è dato dalla formula

$$\frac{\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x}{2\pi} = \frac{-\cos(2\pi)+\cos(0)}{2\pi} = \frac{-1+1}{2\pi} = 0$$



Si ottiene 0, che corrisponde perfettamente con l'intuizione che si ha osservando il grafico.

Invece nell'intervallo $[0, \pi]$ si ha il valore

$$\boldsymbol{\frac{\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x}{\pi} = \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0.64}$$

Notiamo che il valore medio è l'altezza di un *rettangolo* che ha la stessa area con segno (l'integrale) e la stessa base (l'ampiezza dell'intervallo) del grafico in considerazione. In termini molto informali, se rendiamo *liquida* l'area del grafico nell'intervallo, il valore medio è il *livello* della superficie.

In particolare, come **valore medio della derivata** si ha $\boldsymbol{\frac{\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$, perché $f(x)$ è ovviamente primitiva di $f'(x)$. Dal teorema di Lagrange sappiamo che esiste almeno un numero $c \in (a, b)$ che soddisfa $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \boldsymbol{f'(c)}$ (vedi pag. 170). Questi risultati esprimono quindi il fatto che il valore medio di $f'(x)$ per $x \in (a, b)$ è assunto per almeno un valore di $f'(x)$, ossia $f'(c)$, fatto che non si verifica necessariamente nel caso della media dei voti.

Quanto detto riguarda la derivata, ma si dimostra in generale che

per ogni funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso $[a, b]$
esiste $c \in (a, b)$ tale che il valore medio coincide con $f(c)$

Per gli amanti della matematica, diciamo che la dimostrazione dell'esistenza di c si ottiene applicando il ragionamento visto in precedenza alla derivata $F'(x)$ della funzione $F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ (vedi pag. 195).

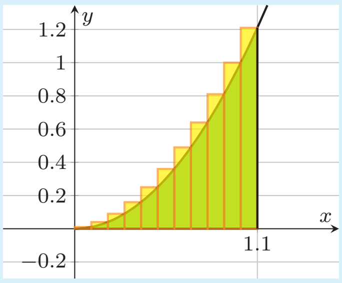
Abbiamo già sperimentato che, anche quando è possibile, trovare una **primitiva** di una funzione non è facile. D'altra parte svariate applicazioni, come ci suggeriscono Laplace e Einstein, richiedono il calcolo di **integrali definiti**.

Ma se non siamo capaci di trovare una primitiva, come possiamo calcolare un integrale definito? Una risposta a questa domanda viene suggerita nella prossima *Curiosità*.

Curiosità matematica 7.18 (Integrazione numerica)

Richiamiamo l'esempio introduttivo per gli integrali definiti (pag. 193). La funzione considerata era $f(x) = x^2$ e ora ne sappiamo facilmente calcolare l'integrale definito, usando una primitiva. Si ha $\displaystyle\int_0^{1.1} \boldsymbol{x^2\,\mathrm{d}x} = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{1.1} \approx \mathbf{0.44367}$.

Ma vediamo come la costruzione dei rettangoli permette di calcolare un integrale in modo approssimato **senza conoscere una primitiva**.



La lunghezza dell'intervallo $[0, 1.1]$ è $\ell = 1.1$. Lo dividiamo in 10 intervallini uguali $[x_{i-1}, x_i]$, cioè $x_i = i \cdot \frac{\ell}{10}$ con $i = 1, 2, ..., 10$.

Ora calcoliamo esplicitamente la somma delle aree dei 10 rettangoli la cui base misura $\frac{\ell}{10}$ e l'altezza è $f(x_i) = x_i^2$.

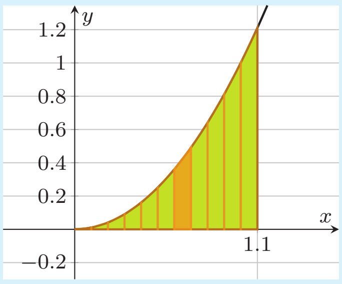
$$\frac{\ell}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} f(x_i) = \frac{\ell}{10} \cdot (0.0121 + 0.0484 + \cdots + 1.21) = 0.512435$$

Se ripetiamo il calcolo dividendo ogni intervallo in due parti otteniamo la somma delle aree di 20 rettangoli, larghi la metà

$$\frac{\ell}{20} \cdot (0.003025 + 0.0121 + 0.027225 + 0.0484 + \cdots + 1.21) \approx 0.4775$$

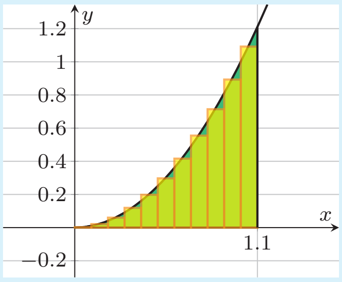
Si noti che abbiamo potuto utilizzare i calcoli fatti al passo precedente e abbiamo calcolato $f(x)$ solo per i nuovi 10 punti. Il risultato è un'approssimazione migliore.

Ora che abbiamo chiarito qual è l'idea, diciamo che in generale si ottiene un'approssimazione molto migliore se, con gli stessi dati, consideriamo le aree dei trapezi, di cui uno è evidenziato nella figura.



L'area di un tale trapezio è $\frac{\ell}{10} \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$ e la somma delle aree dei 10 trapezi è

$$\frac{\ell}{10} \cdot \frac{f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \cdots + f(x_{10})}{2} \approx 0.4459$$



Una approssimazione ancora migliore si ottiene usando rettangoli che hanno come altezza la valutazione di $f(x)$ nel **punto medio** invece che in un estremo dell'intervallo. La somma delle aree dei 10 rettangoli con base $\frac{\ell}{10}$ e altezza $f(x_i - \frac{\ell}{2}) = f(x_i - 0.55)$ è

$$\frac{\ell}{10} \cdot (0.003025 + 0.027225 + \dots) \approx 0.4426$$

In conclusione, per una funzione di cui non conosciamo una primitiva, l'integrale definito si può calcolare approssimativamente usando una di queste costruzioni (o alternandole) e raffinando le suddivisioni fino a quando la differenza tra due risultati successivi è abbastanza piccola da rientrare nell'approssimazione desiderata.

7.5 Equazioni differenziali

Le **equazioni differenziali** forniscono modelli matematici di una quantità enorme di fenomeni. Per citare un esempio noto a tutti, un'applicazione è data dall'**ecografia**. Le onde sonore riflesse dagli organi o dal feto soddisfano particolari equazioni differenziali in più variabili. Risolvendo un cosiddetto **problema inverso** vincolato a tali equazioni, si può risalire alla forma dell'oggetto che le ha riflesse e riprodurla in un'immagine.

In modo del tutto analogo si determinano le forme degli strati di diversa densità al di sotto della crosta terrestre.

È un argomento così importante che ha meritato trattazioni approfondite. Nel nostro libro ne offriamo solo un assaggio.

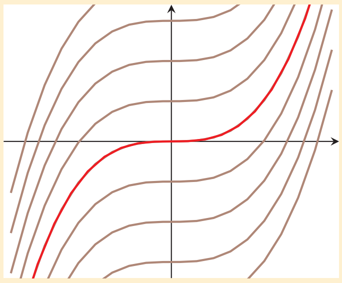
Cosa sono le **equazioni differenziali**?
Sono equazioni in cui l'incognita è una funzione e nell'equazione stessa compaiono sia la funzione che le sue derivate. Per esempio riconsideriamo la ricerca della primitiva di una data funzione $f(x)$. Il problema consiste nel trovare una funzione $g(x)$ tale che $g'(x)$ sia $f(x)$. Allora, se indichiamo con $\boldsymbol{y}$ la **funzione incognita**, possiamo esprimere questa ricerca in termini di soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' - f(x) = 0$$

Come detto, non entreremo in profondità nella teoria delle equazioni differenziali. Ci limiteremo a descrivere alcuni esempi adatti a farci una idea del concetto di equazione differenziale e di alcuni modi per risolverle.

Esempio 7.19 ($y' - x^2 = 0$)

L'equazione $y' - x^2 = 0$, equivalente a $y' = x^2$, ha come soluzioni tutte le primitive di x^2.



In questo caso sappiamo che $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ è una soluzione, infatti $g'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$ e quindi

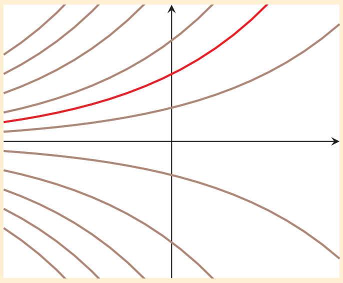
$$g'(x) - x^2 = 0$$

Tutte le altre soluzioni dell'equazione sono $h(x) = g(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Esempio 7.20 ($y' - y = 0$)

L'equazione differenziale $y' - y = 0$ ha soluzione $g(x) = e^x$ dato che $g'(x) = e^x$ e quindi si ha

$$g'(x) - g(x) = 0$$

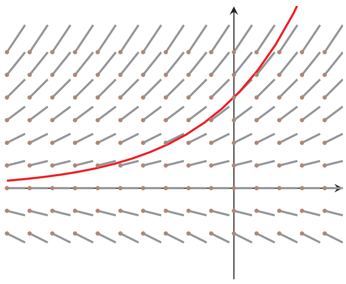


Più in generale l'equazione $y' - k \cdot y = 0$ con $k \in \mathbb{R}$ è soddisfatta da $g(x) = e^{k \cdot x}$, infatti $g'(x) = k \cdot e^{k \cdot x}$ e quindi

$$g'(x) - k \cdot g(x) = 0$$

Le altre soluzioni dell'equazione sono del tipo $h(x) = c \cdot g(x)$ con $c \in \mathbb{R}$.

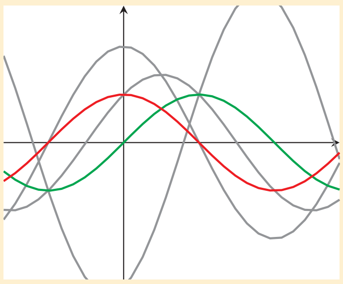
Le equazioni che coinvolgono soltanto la derivata prima y' si chiamano **equazioni del primo ordine**. La prossima figura ci aiuta a dare una interpretazione grafica di una di queste equazioni.



Nell'ultimo esempio, dire che $g(x)$ soddisfa l'equazione $y' - y = 0$ significa dire che $g'(x) = g(x)$. Si deduce che la tangente al grafico in $(a, \ g(a))$ ha pendenza $g'(a) = g(a)$.

Nella figura accanto vediamo i tratti di tangente nei punti (a, b) con pendenza b.

Esempio 7.21 ($y'' + y = 0$)



L'equazione $y'' + y = 0$ ha soluzione $g(x) = \cos(x)$ infatti $g'(x) = -\sin(x)$ e $g''(x) = -\cos(x)$, da cui

$$g''(x) + g(x) = 0$$

E anche $\sin(x)$ è soluzione.

E anche $a \cdot \sin(x) - b \cdot \cos(x)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Non esistono soluzioni generali delle equazioni differenziali, ma esistono tecniche per risolvere alcune classi speciali.

Curiosità matematica 7.22 (Equazioni differenziali polinomiali)

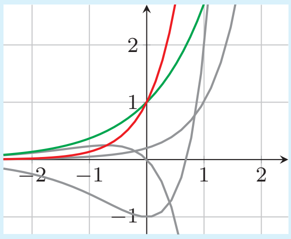
Vediamo ora alcuni esempi che mostrano come risolvere equazioni differenziali a coefficienti in $\mathbb{R}$ e **omogenee**, cioè con costante nulla.

Un'equazione omogenea del primo ordine è del tipo $y' + k \cdot y = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Abbiamo visto a pagina 203 che tutte le sue soluzioni sono $c \cdot e^{k \cdot x}$ con $c \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora esempi che mostrano i diversi casi che possiamo incontrare al **secondo ordine** $\boldsymbol{y'' + sy' + ty = 0}$, a cui si associa il polinomio $\boldsymbol{x^2 + sx + t}$ che si chiama **polinomio caratteristico**.

Data $y'' - 3y' + 2y = 0$, il polinomio caratteristico di questa equazione differenziale è $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, che ha **due radici reali distinte** $\alpha = 1$ e $\beta = 2$. Allora due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale sono

$$\boldsymbol{g_1(x) = e^{\alpha x}} = e^x \qquad \boldsymbol{g_2(x) = e^{\beta x}} = e^{2x}$$

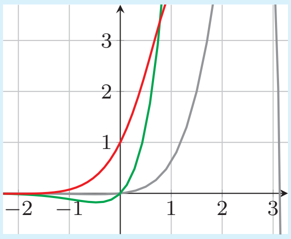


Ma possiamo dire di più, cioè che ogni soluzione y dell'equazione differenziale è del tipo

$$c_1 \cdot g_1(x) + c_2 \cdot g_2(x) \;=\; c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$
$$\text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

L'equazione $y'' - 4y' + 5y = 0$ ha polinomio caratteristico $x^2 - 4x + 5$ che non ha radici reali ma ha le **due radici complesse coniugate** $a + b\,i$ e $a - b\,i$, con $a = 2$ e $b = 1$ (vedi pag. 86). La conseguenza è che due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale sono le seguenti

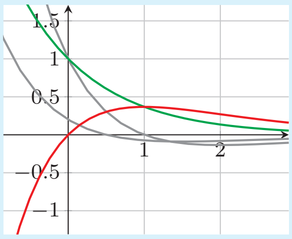
$$\begin{aligned} \boldsymbol{g_1(x)} &= \boldsymbol{e^{ax}\sin(bx)} = e^{2x} \cdot \sin(x) \\ \boldsymbol{g_2(x)} &= \boldsymbol{e^{ax}\cos(bx)} = e^{2x} \cdot \cos(x) \end{aligned}$$



e tutte le soluzioni sono, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$c_1 \cdot g_1(x) + c_2 \cdot g_2(x) \;=\; e^{2x} \cdot (c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x))$$

L'equazione $y'' + 2y' + y = 0$ ha polinomio caratteristico $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ che ha una **radice doppia** $\alpha = -1$.



In questo caso due soluzioni indipendenti sono

$$\boldsymbol{g_1(x) = e^{\alpha x}} = e^{-x} \qquad \boldsymbol{g_2(x) = x \cdot e^{\alpha x}} = x \cdot e^{-x}$$

e tutte le soluzioni sono, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \;=\; (c_1 + c_2 x) \cdot e^{-x}$$

Per finire, ecco un assaggio di un'equazione differenziale di **terzo ordine**. L'equazione $y''' - y'' = 0$ ha polinomio caratteristico $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ che ha la radice $\alpha = 0$ di molteplicità 2 e la radice $\beta = 1$ con molteplicità 1. Le tre soluzioni indipendenti sono

$$\boldsymbol{g_1(x) = e^{\alpha \cdot x}} = 1 \qquad \boldsymbol{g_2(x) = x \cdot e^{\alpha \cdot x}} = x \qquad \boldsymbol{g_3 = e^{\beta \cdot x}} = e^x$$

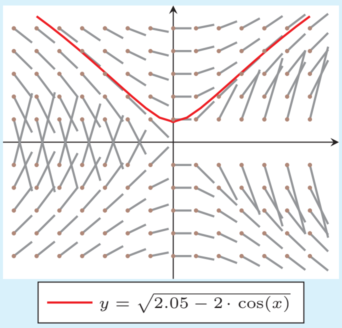
e tutte le soluzioni sono, al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$,

$$c_1 \cdot g_1(x) + c_2 \cdot g_2(x) + c_3 \cdot g_3(x) \;=\; c_1 + c_2 x + c_3 e^x$$

Il lettore più curioso sarà felice, o almeno soddisfatto, di sapere che questa tecnica si applica in generale: le radici reali e complesse del polinomio associato a un'equazione differenziale omogenea a coefficienti reali si traducono in combinazioni di potenze, esponenziali, seni e coseni che risolvono l'equazione differenziale!

Curiosità matematica 7.23 (Variabili separabili)

Un esempio un poco più complicato dei precedenti è l'equazione $y' - \frac{\sin(x)}{y} = 0$. Vediamo in figura i tratti di tangente nei punti (a, b) con pendenza $\frac{\sin(a)}{b}$. Usando la notazione di Leibniz scriviamo l'equazione in questo modo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin(x)}{y}$. Tralasciamo i dettagli, ma i matematici dimostrano che possiamo *operare algebricamente* con i simboli $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$, per *separare le variabili* x e y.



Si scrive $y \; \mathrm{d}y = \sin(x) \; \mathrm{d}x$, e poi si integra

$$\int y \; \mathrm{d}y = \int \sin(x) \; \mathrm{d}x.$$

Ne segue che $\frac{y^2}{2} = -\cos(x) + c$.

Si conclude, sotto opportune ipotesi di dominio, che le soluzioni sono

$$y = \sqrt{-2\cos(x) + c'} \qquad y = -\sqrt{-2\cos(x) + c'}$$

Naturalmente ci auguriamo che tutte queste *Curiosità matematiche* abbiano davvero stimolato la curiosità del lettore e lo abbiano indotto ad approfondire questo argomento di basilare importanza, in modo da smentire... Oscar Wilde.

the public have an insatiable curiosity to know everything,
except what is worth knowing
(Oscar Wilde)

Esercizi

Esercizio 7.1. Determinare le primitive delle seguenti funzioni e verificare il risultato.

(a) $(x+3)^2$
(b) $\sqrt{x-7}$
(c) $\frac{1}{(x+12)^3}$
(d) $\frac{3x^2}{x^3+4}$
(e) $\sin(x+2)$
(f) $5x^4\cos(x^5+4)$

Esercizio 7.2. Determinare le primitive delle seguenti funzioni e verificare il risultato.

(a) $(4x+1)^3$
(b) $\frac{12}{x^2}$
(c) $\sin(3x-2)$
(d) $\frac{x}{x^2+2}$
(e) $8x^2$

Esercizio 7.3. Calcolare i seguenti integrali.

(a) $\int \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x$
(b) $\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

Suggerimento

(a) $\int \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+1-1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \cdots$
(b) $\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \cdots$ □

Esercizio 7.4. Calcolare per parti i seguenti integrali.

(a) $\int xe^x\,\mathrm{d}x$
(b) $\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$
(c) $\int (\cos(x))^2\,\mathrm{d}x$

Suggerimento

(b) $g(x)=\ln(x)$ e $h'(x)=x$ da cui $h(x)=\frac{x^2}{2}$.
(c) $(\cos(x))^2 = g(x)h'(x)$ con $g(x)=\cos(x)$ e $h'(x)=\cos(x)$, da cui $h(x)=\sin(x)$. Quindi $\int(\cos(x))^2\,\mathrm{d}x$ $=\sin(x)\cos(x)+\int(\sin(x))^2\,\mathrm{d}x = \sin(x)\cos(x)+\int 1-(\cos(x))^2\,\mathrm{d}x = \sin(x)\cos(x)+x-\int(\cos(x))^2\,\mathrm{d}x$ quindi ... □

Esercizio 7.5. Calcolare per sostituzione i seguenti integrali.

(a) $\int e^x\sin(e^x)\,\mathrm{d}x$
(b) $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Suggerimento

(a) Porre $u=e^x$.
(b) Si ricordi che $e^{\sqrt{x}}$ è definita per $x\in[0,+\infty)$. Si pone $u=\sqrt{x}$ e quindi $x=u^2$. Si ricava $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2ue^u du$. Si prosegue poi come nell'esercizio 7.4.a. □

Esercizio 7.6. Calcolare i seguenti integrali.

(a) $\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}\,\mathrm{d}x$
(b) $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$
(c) $\int \frac{x}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

SUGGERIMENTO

Usare la scomposizione vista nella sezione 3.2.3. □

Esercizio 7.7. Calcolare i seguenti integrali definiti.

(a) $\int_0^2 (x^2+x)\,\mathrm{d}x$
(b) $\int_3^4 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$
(c) $\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

SUGGERIMENTO

(c) Integrare per parti □

Esercizio 7.8. Calcolare l'area della regione del piano così definita.

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\frac{1}{2}, 2],\ \ y \in [0, 12-3x^2]\}$$

Esercizio 7.9. Calcolare l'area della regione del piano compresa tra le rette $y=0$, $x=3$, $x=7$ e il grafico della funzione $f(x)=\frac{1}{x}$.

Matematica di base

Seconda edizione

Risorse online
A questo indirizzo si può accedere al sito di complemento al libro
online.universita.zanichelli.it/bigattirobbiano2e

Ebook
L'intero libro in formato elettronico, con possibilità di evidenziare, commentare e personalizzare il testo

Test Interattivi Zanichelli
Il sistema di esercizi interattivi per studenti e docenti, con classe virtuale

Per l'accesso registrarsi su
my.zanichelli.it
e abilitare le risorse.
Maggiori informazioni nelle pagine iniziali del libro.

Perché per vivere a Londra è necessario studiare l'inglese? O per ballare il tango imparare i passi? Perché per fotografare bisogna sapere che cosa sono la profondità di campo, la luminosità, la saturazione del colore? Sembrano domande dalla risposta scontata. Allora, provate a rispondere a questa: perché per naturalisti, ambientalisti, geologi e biologi è indispensabile studiare matematica?
La matematica è il linguaggio basilare della scienza, senza il quale nessuno può fare scienza, né tantomeno comunicarla. Questo libro "racconta" la matematica, in particolare quella indispensabile a chi studia per comprendere la scienza; lo fa in modo diretto, essenziale, colorato e non serioso, perché non è scritto da nessuna parte che un testo di matematica debba essere arido e noioso.

Dal momento che molti studenti, studentesse e docenti hanno apprezzato tale impostazione, in questa seconda edizione è stato rafforzato il metodo con il quale descrivere i fenomeni matematici, enfatizzando gli aspetti tecnici, storici, culturali.
Ora il libro è più ricco in tutte le sue componenti, teoriche e applicative, anche se è bene ricordare che, paragonato a tutto il sapere matematico, il suo contenuto è niente altro che una particella infinitesima. *Ma non nulla*.

Gli autori

Anna Maria Bigatti insegna Elementi di Matematica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova. La sua ricerca si svolge nel campo dell'Algebra computazionale.
Lorenzo Robbiano è stato professore ordinario presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Genova. Ha pubblicato libri su argomenti di ricerca tra i quali, con Martin Kreuzer: *Computational Commutative Algebra* 1 e 2 (Springer, 2000 e 2005) e *Computational Linear and Commutative Algebra* (Springer, 2016).

BIGATTI*MATEMATICA DI BASE2E(CEALUM
ISBN 978-88-08-72013-9
9 788808 720139
2 3 4 5 6 7 8 9 0 (64B)